ANGLES ORIENTES - EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

1) Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points M tels que $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{27\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

2) Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points N tels que $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}\right)=-\frac{38\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

3) Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points P $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OP}\right)=x$ avec $3x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Exercice n°2.

Soir (C) un cercle de centre A et B un point de (C)

1) Construire les points C,D,E et F du cercle (C) tels que :

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3\pi}{4}$ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=\frac{7\pi}{6}$ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)=-\frac{3\pi}{4}$

2) Déterminer une mesure puis la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)$ $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}\right)$ $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}\right)$ $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)$

Exercice n°3.

ACE est un triangle isocèle direct de sommet principal A et tel que AC=5 et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)=\frac{2\pi}{5}(2\pi)$

1) Tracez le triangle équilatéral direct AEF et le triangle ABC isocèle rectangle direct en A.

2) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)$ $\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BC}\right)$ $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{CB}\right)$ $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{EC}\right)$

ANGLES ORIENTES - CORRECTION

Exercice n°1

(figure en fin d'exercice)

1) Puisque $\frac{27\pi}{6}=\frac{(24+3)\pi}{6}=\frac{24\pi}{6}+\frac{3\pi}{6}=4\pi+\frac{\pi}{2}=2\times\underbrace{2\pi}_{\text{un tour dans le sens trigo}}+\frac{\pi}{2}$, on peut écrire que

$\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)=2\times 2\pi+\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}=\frac{\pi}{2}+2l\pi,l\in\mathbb{Z}$

2) Puisque $-\frac{38\pi}{3}=-\frac{(36+2)\pi}{3}=-12\pi-\frac{2\pi}{3}=6\times\underbrace{(-2\pi)}_{\text{un tour dans le sens trigo inverse}}-\frac{2\pi}{3}$, on peut écrire que

$\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}\right)=6\times(-2\pi)-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}=-\frac{2\pi}{3}+2l\pi,l\in\mathbb{Z}$

3) Attention à la division par 3 :

Si $3x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ alors $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

Pour $k=0$, on obtient $x_0=-\frac{\pi}{6}$ (point P_0)

Pour $k=1$ on obtient $x_1=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ (point P_1)

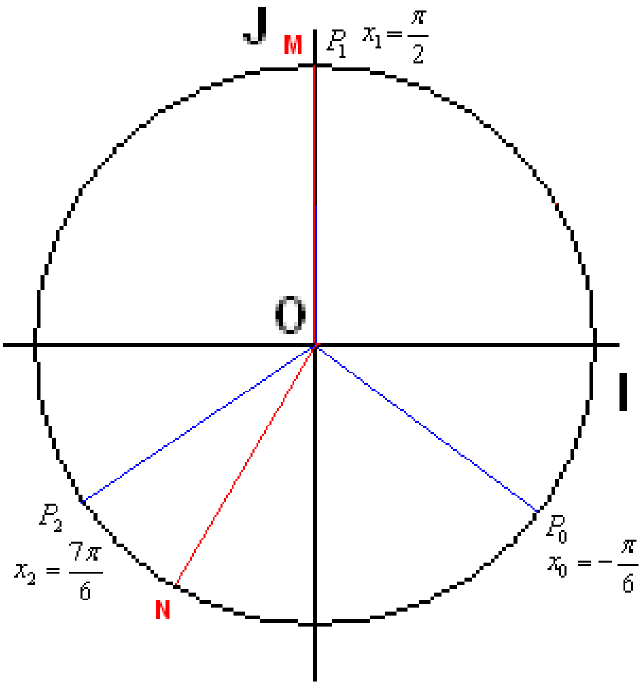
Pour $k=2$ on obtient $x_2=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\times 2\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}$ (point P_2)

Pour $k=3$on obtient $x_3=-\frac{\pi}{6}+\frac{3\times 2\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2\pi$.

On retombe sur le point P_0

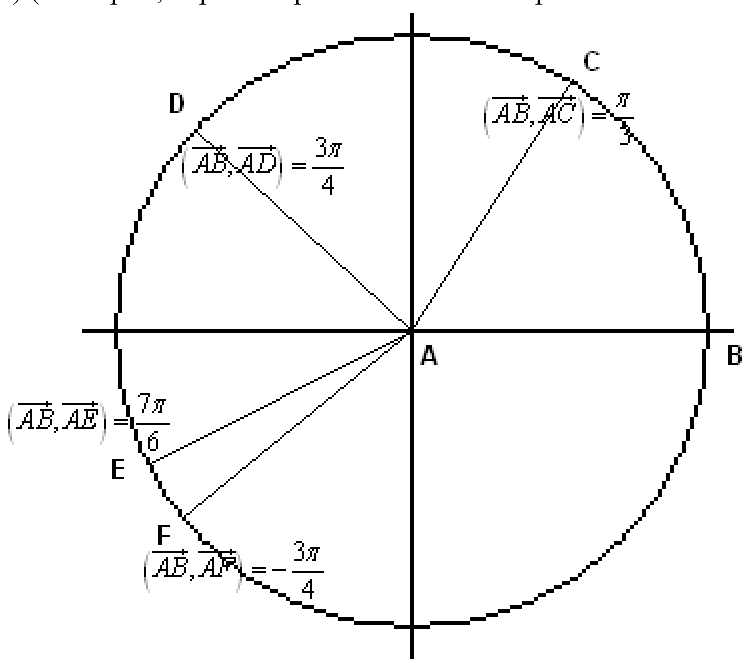
De même, pour k = -1 on obtient $x_{-1}=-\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}$.

On retombe sur le point P_2



Exercice n°2

1) (Au départ, le point B peut être choisi n'importe où sur le cercle)



2) Par application de la relation de Chasles sur les angles orientés de vecteurs :

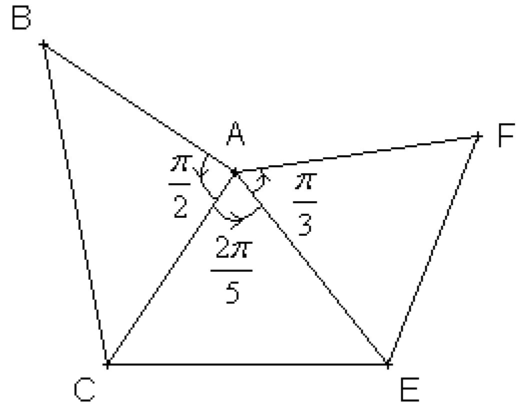
$$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)(2\pi)$$
$$=-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{6}(2\pi)$$
$$\boxed{=\frac{5\pi}{6}(2\pi)}$$

$$\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}\right)=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)(2\pi)$$
$$=-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{3\pi}{4}+\left(-\frac{3\pi}{4}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{3\pi}{2}(2\pi)\boxed{=\frac{\pi}{2}(2\pi)}$$

$$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)(2\pi)$$
$$=-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)(2\pi)$$
$$=-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}(2\pi)$$
$$=\frac{13\pi}{12}(2\pi)\boxed{=-\frac{11\pi}{12}(2\pi)}$$

$$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)(2\pi)$$
$$=-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)(2\pi)$$
$$=-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{7\pi}{6}(2\pi)$$
$$=\frac{23\pi}{12}(2\pi)\boxed{=-\frac{\pi}{12}(2\pi)}$$

<u>Exercice n°3</u>



1) Si le triangle AEF est triangle équilatéral direct, alors AE=AF et $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\right)=\frac{\pi}{3}$

Si le triangle ABC est isocèle rectangle direct en A, alors AB=AC et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$

2) Par application de la relation de Chasles sur les angles orientés de vecteurs, et de la propriété $\left(-\vec{u},\vec{v}\right)=\left(\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)-\pi(2\pi)$, on détermine :

$$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+\left(-\frac{\pi}{2}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{37\pi}{30}(2\pi)\boxed{=\frac{23\pi}{30}(2\pi)}$$

$$\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EA}\right)+\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)+\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{BC}\right)(2\pi)$$
$$=\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{10}+\left(-\overrightarrow{CE},-\overrightarrow{CB}\right)(2\pi)$$
$$=\frac{19\pi}{30}+\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}\right)(2\pi)$$
$$=\frac{19\pi}{30}+\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{4}(2\pi)=\frac{28\pi}{30}+\frac{\pi}{4}(2\pi)$$
$$=\frac{71\pi}{60}(2\pi)\boxed{=-\frac{49\pi}{60}(2\pi)}$$

$$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+\left(-\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{11\pi}{15}+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)-\pi(2\pi)$$
$$=-\frac{11\pi}{15}+\frac{\pi}{4}-\pi(2\pi)=-\frac{89\pi}{60}(2\pi)\boxed{=\frac{31\pi}{60}(2\pi)}$$

$$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{EC}\right)=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{EC}\right)(2\pi)$$
$$=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)+\left(-\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{\pi}{3}+\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)-\pi(2\pi)$$
$$=-\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{10}-\pi(2\pi)=-\frac{31\pi}{30}(2\pi)\boxed{=\frac{29\pi}{30}(2\pi)}$$